

## Exercices avec corrections sur la logique

---

**Exercice 1** Ecrire les contraposées des implications suivantes et les démontrer.  $n$  est un entier naturel,  $x$  et  $y$  sont des nombres réels.

1.  $n$  premier  $\Rightarrow n = 2$  ou  $n$  est impair ,
2.  $xy \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$  et  $y \neq 0$  ,
3.  $x \neq y \Rightarrow (x + 1)(y - 1) \neq (x - 1)(y + 1)$  .

**Exercice 2** Ecrire les réponses aux questions suivantes, portant sur des entiers naturels, sous la forme d'assertions mathématiques (écrites avec les symboles “ $\forall$ ”, “et”, “ou”, “ $\Rightarrow$ ”, “ $\Leftrightarrow$ ”) et les prouver.

1. Le produit de deux nombres pairs est-il pair ?
2. Le produit de deux nombres impairs est-il impair ?
3. Le produit d'un nombre pair et d'un nombre impair est-il pair ou impair ?
4. Un nombre entier est-il pair si et seulement si son carré est pair ?

**Exercice 3** Soient les quatre assertions suivantes :

1.  $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$  ,
2.  $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y > 0$  ,
3.  $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y^2 > x$  ,
4.  $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, |x| < \alpha \Rightarrow |x^2| < \varepsilon$  .

Les assertions 1, 2, 3 et 4 sont elles vraies ou fausses ? Donner leurs négations.

**Exercice 4** 1. Soit  $n \geq 2$  un entier. Montrer par l'absurde que, si  $n$  n'est pas premier, il admet un diviseur premier  $p$  qui est inférieur ou égal à  $\sqrt{n}$  .

2. A l'aide de ce critère, déterminer si les nombres 89, 167 et 191 sont premiers.

**Exercice 5** Montrer que  $\sqrt{89}$  est irrationnel.

**Exercice 6** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que soit 4 divise  $n^2$ , soit 4 divise  $n^2 - 1$ .

**Exercice 7** \* Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

1.  $n^3 - n$  est divisible par 6 ,
2.  $n^5 - n$  est divisible par 30 ,
3.  $n^7 - n$  est divisible par 42 .

*Indication : Pour 1, on peut factoriser  $n^3 - n$  pour voir que ce nombre est multiple de 2 et de 3. Les cas 2 et 3 peuvent se traiter de façon analogue.*

**Exercice 8** Démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N} - \{0, 1, 2, 3\}, \quad n^2 \leq 2^n .$$

**Exercice 9** Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on définit deux propriétés :

$$P_n : 3 \text{ divise } 4^n - 1 \quad \text{et} \quad Q_n : 3 \text{ divise } 4^n + 1 .$$

1. Prouver que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P_n \Rightarrow P_{n+1}$  et  $Q_n \Rightarrow Q_{n+1}$  .
2. Montrer que  $P_n$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  .
3. Que penser, alors, de l'assertion :  $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \Rightarrow Q_n \quad ?$

## Correction d'exercices de logique

**Correction 1** 1.  $n$  pair,  $n \neq 2 \Rightarrow n$  non premier. Démo : si  $n$  pair,  $n \neq 2$  alors 2 divise  $n$  et  $n$  n'est pas premier.

2.  $x = 0$  ou  $y = 0 \Rightarrow xy = 0$ . Démo triviale.

3.  $(x + 1)(y - 1) = (x - 1)(y + 1) \Rightarrow x = y$ . Démo : si  $(x + 1)(y - 1) = (x - 1)(y + 1)$  alors en développant  $-x + y = x - y$ , d'où  $2y = 2x$ ,  $x = y$ .

**Correction 2** 1. Oui.  $n, m$  pairs  $\Rightarrow nm$  pair. Démo :  $\exists i, n = 2i$  donc  $nm = 2(im)$  est pair.

2. Oui.  $n, m$  impairs  $\Rightarrow nm$  impair. Démo :  $\exists i, j, n = 2i + 1, m = 2j + 1$  donc  $nm = 2(2ij + i + j) + 1$  est impair (ou par contraposée).

3. Pair. ( $n$  pair,  $m$  impair)  $\Rightarrow nm$  pair (cf 1).

4. Oui.  $n$  pair  $\Leftrightarrow n^2$  pair. Démo : si  $n$  pair alors  $n^2 = n \times n$  est pair par 1) (sens  $\Rightarrow$ ); Si  $n$  impair alors  $n^2$  est impair par 2), ce qui donne le sens  $\Leftarrow$  par contraposée.

**Correction 3** 1. Faux. Négation :  $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y \leq 0$  (démo : soit  $x \in \mathbb{R}$ , on prend  $y = -x$ ).

2. Vrai (démo :  $y = -x + 1$ ). Négation :  $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y \leq 0$ .

3. Vrai (démo : soit  $x = -1, \forall y \in \mathbb{R}, y^2 > -1$ ). Négation :  $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y^2 \leq x$ .

4. Vrai (démo :  $\alpha = \sqrt{\varepsilon} \in \mathbb{R}^{+*}$ ). Négation :  $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \forall \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \exists x \in \mathbb{R}, |x| < \alpha$  et  $|x^2| \geq \varepsilon$ .

**Correction 4** 1. Soit  $n$  non premier. Supposons que  $n$  n'a pas de diviseur premier  $p \leq \sqrt{n}$ .  
 $n$  non premier  $\Rightarrow \exists a, b \geq 2, n = ab$ . Tout nombre  $x \geq 2$  a un diviseur premier  $\leq x$ . Si  
 $a \leq \sqrt{n}$  ou  $b \leq \sqrt{n}$ , cela donne une contradiction. Donc  $a > \sqrt{n}$  et  $b > \sqrt{n}$ , ce qui  
 implique  $n > n$ , absurde. D'où le résultat.

2. •  $\sqrt{89} \simeq 9.4$ . 89 n'est pas divisible par 2, 3, 5 ou 7, donc 89 est premier.
- $\sqrt{167} \simeq 12.9$ . 167 n'est pas divisible par 2, 3, 5, 7, 11 donc 167 est premier.
- $\sqrt{191} \simeq 13.8$ . 191 n'est pas divisible par 2, 3, 5, 7, 11, 13 donc 191 est premier.

**Correction 5** Raisonnement par l'absurde. Supposons que  $\sqrt{89} = \frac{p}{q}$  avec  $p, q$  premiers entre eux. Alors  $89q^2 = p^2$ . 89 est premier (exo 4) donc 89 divise  $p$  : il existe  $k, p = 89k$ . Donc  $q^2 = 89k^2$  et 89 divise  $q$ . C'est une contradiction donc  $\sqrt{89}$  est irrationnel.

**Correction 6** Si  $n = 2k$  (pair) alors 4 divise  $n^2 = 4k^2$ . Si  $n = 2k + 1$  (impair) alors 4 divise  $n^2 - 1 = 4(k^2 + k)$ .

**Correction 7**  $n^3 - n = n(n^2 - 1)$ .  $n$  pair  $\Rightarrow n^3 - n$  multiple de 2.  $n$  impair  $\Rightarrow n^2 - 1$  pair et  $n^3 - n$  multiple de 2.

$n$  multiple de 3  $\Rightarrow n^3 - n$  multiple de 3.  $n = 3k + 1 \Rightarrow n^2 - 1 = 3(3k^2 + 2k)$  multiple de 3.  
 $n = 3k + 2 \Rightarrow n^2 - 1 = 3(3k^2 + 4k)$  multiple de 3. Dans les 3 cas,  $n^3 - n$  est multiple de 3.  
 $n^3 - n$  est divisible par 2 et 3 qui sont premiers entre eux donc  $n^3 - n$  est divisible par 6.

**Correction 8** Initialisation : pour  $n = 4, 4^2 = 16 = 2^4$ .

Hérédité : on suppose  $n^2 \leq 2^n$  avec  $n \geq 4$ .  $n > 2$  donc  $2n < n \times n$ , donc  $2n \leq n^2 - 1$ . D'où  $(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1 \leq n^2 + n^2 \leq 2.2^n = 2^{n+1}$ . C'est la propriété au rang  $n + 1$ .

Conclusion :  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4, n^2 \leq 2^n$ .

**Correction 9** 1. Si  $P_n$  est vraie alors  $4^{n+1} - 1 = 4(4^n - 1) + 3$  est un multiple de 3 donc  $P_{n+1}$  est vraie. Si  $Q_n$  est vraie alors  $4^{n+1} + 1 = 4(4^n + 1) - 3$  est un multiple de 3 donc  $Q_{n+1}$  est vraie.

2. Initialisation :  $4^0 - 1 = 0$  donc  $P_0$  est vraie. Hérédité : question 1). Conclusion :  $P_n$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

3. C'est faux. Preuve par l'absurde : Si  $Q_{n_0}$  est vraie alors  $(4^{n_0} + 1) + (4^{n_0} - 1) = 4^{n_0}$  est un multiple de 3 à cause de  $P_{n_0}$  et  $Q_{n_0}$ . Or le seul nombre premier qui divise  $4^{n_0}$  est 2, donc c'est absurde et  $Q_{n_0}$  est fausse.